2°/a) $g:[0,\frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R} : x \mapsto -\ln(\cos x)$

g est définie, continue, strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ donc g est une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $g([0,\frac{\pi}{2}[)=\mathbf{R}_+$.

b) $g^{-1}(\ln\sqrt{2})=y \Leftrightarrow g(y)=\ln\sqrt{2} \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{\cos y})=\ln\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos y=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{4}$ car $y\in[0,\frac{\pi}{2}[$ d'où $g^{-1}(\ln\sqrt{2})=\frac{\pi}{4}$

c) On a: g est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[, g'(x)\neq 0$ donc g^{-1} est dérivable sur $g(]0,\frac{\pi}{2}[)=\mathbf{R}_+^*$

Etudions la dérivabilité de g^{-1} à droite en $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(0)}{x-0}=\lim_{X\to 0^+}\frac{X-0}{f(X)-f(0)}=\lim_{X\to 0^+}\frac{1}{\frac{f(X)-f(0)}{X-0}}=+\infty$$

car $\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{f(X)-f(0)}{X-0}=f'(0)=0^+$

d'où g^{-1} n'est pas dérivable en 0.

3°/a) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbf{N}$, $0\le U_n\le\frac{\pi}{4}$

- pour $n=0$, $0\le U_n\le\frac{\pi}{4}$ est vraie
- supposons que pour un entier donné n, on a : $0\le U_n\le\frac{\pi}{4}$ et montrons que $0\le U_{n+1}\le\frac{\pi}{4}$.

$0\le U_n\le\frac{\pi}{4}$ et f est strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{4}[$ donc

$f(0)\le f(U_n)\le f(\frac{\pi}{4})$ or $f(0)=-\text{Log}(\cos 0)=0$;

$f(\frac{\pi}{4})=-\ln(\cos\frac{\pi}{4})=\ln\sqrt{2}\le\frac{\pi}{4}$ d'où $0\le U_{n+1}\le\frac{\pi}{4}$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbf{N}$, $0\le U_n\le\frac{\pi}{4}$.